

Forme della matematica e realtà

Sergio Savarino, docente scuola superiore



L'ipotesi è che per motivare lo studente occorra:

- 1) mostrare come le materie di studio fanno riferimento a situazioni di realtà e la realtà sia modellizzabile tramite strumenti matematici.
- 2) forzare i recinti disciplinari per avere un ritorno d'informazione e un consolidamento degli schemi culturali.

Si farà riferimento per questo a importanti strutture architettoniche sottolineandone gli aspetti geometrici e i caratteri fisici più significativi.

E' doveroso iniziare con l'immagine riportata a fianco. Un palazzo 'simbolo' del Razionalismo in architettura, la corrente del '900 la cui cifra è l'uso di forme, linee,

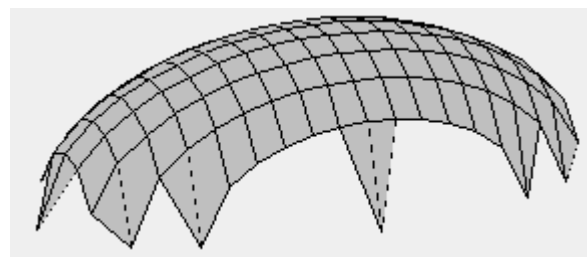
superfici estremamente essenziali e geometricamente connotate e che ha in Niemeyer uno dei più importanti rappresentanti.

Per l'elaborazione grafica delle immagini si fa uso di 'Derive', un software che è in dotazione in moltissime scuole superiori.

Quadriche.

Nel caso delle quadriche l'operazione è semplice, la comparazione con strutture architettoniche del tutto immediata.

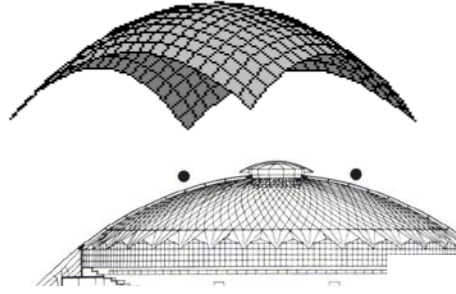
La semiellissoide è la sagoma tipica delle sale concerto



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$$

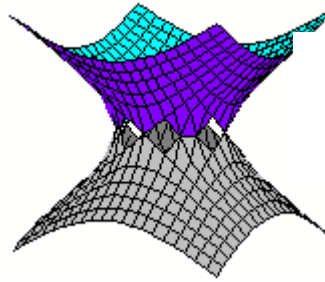
Ma anche:

Pier Luigi Nervi: Palazzetto dello sport



Dove, tra l'altro, il motivo decorativo della copertura è lo stesso della pavimentazione della piazza del Campidoglio a Roma.

$$z = \sqrt{(-x^2 - y^2 + 1)}$$

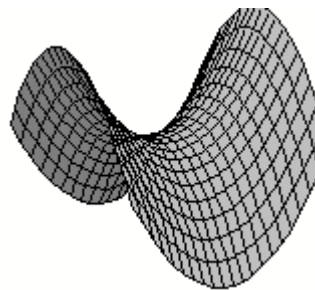


Iperboloide a una falda (iperbolico)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Oscar Niemayer

Cattedrale di Brasilia



Paraboloide iperbolico:

$$x^2 - y^2 = z$$

Santiago Calatrava: Aeroporto

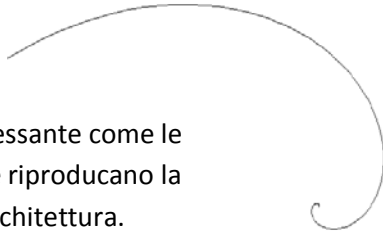
Lyon-Satolas

Spirali.

E' la tematica di partenza. L'obiettivo è riprodurre matematicamente la pavimentazione di Piazza del Campidoglio a Roma. La curva base è una spirale logaritmica, in coordinate polari:

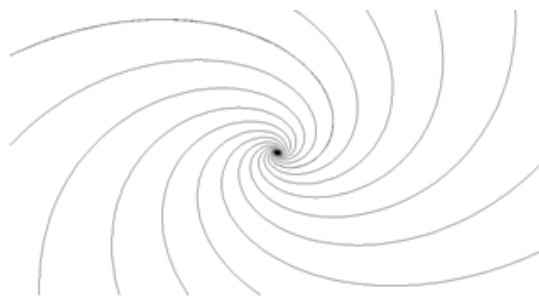
$$\rho =$$

in molti casi è interessante come le forme matematiche riproducano la natura oltre che l'architettura.



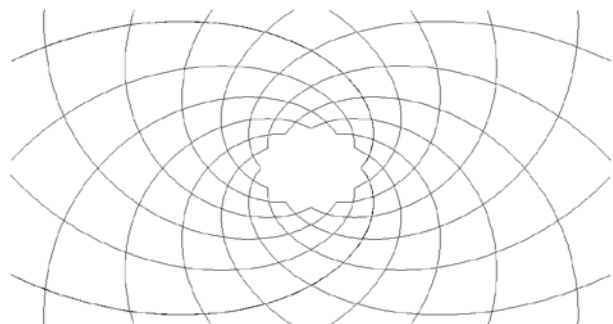
Ruotando ripetutamente di 30° gradi per volta :

$$\text{VECTOR} \left(2^{\alpha + \delta}, \delta, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{6} \right)$$



la rete si ottiene, poi, ripetendo l'operazione nel verso opposto.

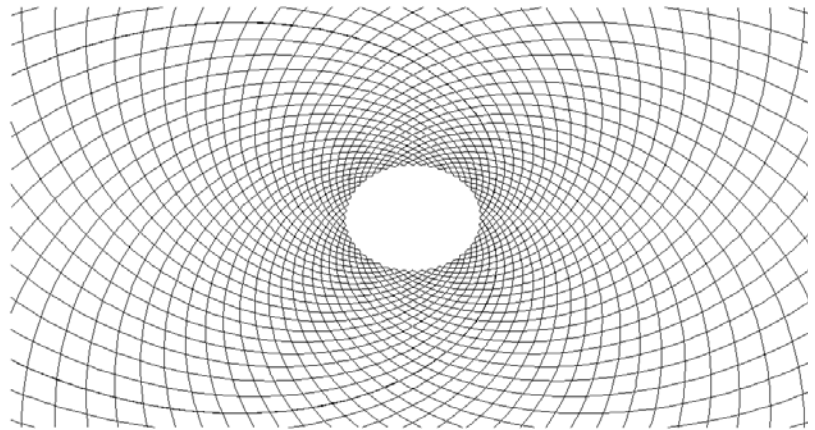
$$\text{VECTOR} \left(2^{|\alpha + \delta|}, \delta, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{6} \right)$$



Aumentandone la densità (per es. ruotando di $\pi/24$) si ha l'infiorescenza del

girasole:

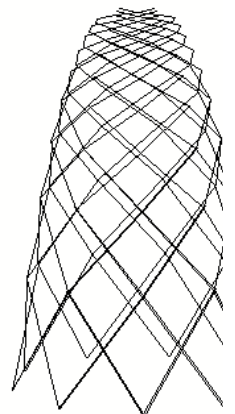
$$\text{VECTOR} \left(2^{|\alpha + \delta|}, \delta, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{24} \right)$$



Usando la stessa equazione, sviluppata in tre dimensioni, ecco il grattacielo Swiss Re di Norman Foster, caratteristico dello skyline di Londra:

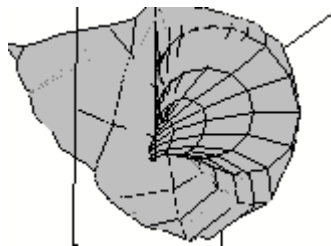
$$\text{VECTOR}\left(\left[1.2 \cdot \cos(1.4 \cdot t), 1.2 \cdot \sin(1.4 \cdot t), -2 \cdot t + d\right], d, 0, 30, 0.5\right)$$

$$\text{VECTOR}\left(\left[1.2 \cdot \cos(-1.4 \cdot t), 1.2 \cdot \sin(-1.4 \cdot t), -2 \cdot t + d\right], d, 0, 30, 0.5\right)$$



L'equazione, opportunamente manipolata, fornisce la conchiglia 'pecten', a cui s'ispira la

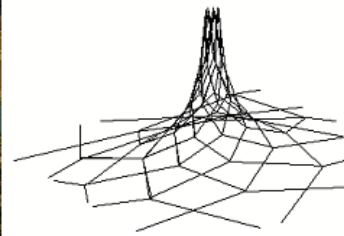
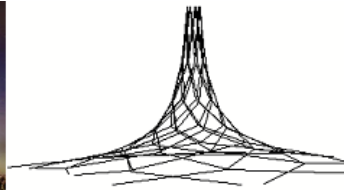
Piazza del Campo a Siena: $\left[(1 + \cos(v)) \cdot e^u \cdot \cos(u), (1 + \cos(v)) \cdot e^u \cdot \sin(u), (1 + \sin(v)) \cdot e^u \right]$



e di Norman Foster è il progetto, che forse resterà tale, del 'Cristal Island' a Mosca, che si ottiene riprendendo le equazioni del grattacielo Swiss Re, con un numero minore di uno elevato ad α ($0,3^\alpha$):

$$\text{VECTOR}\left(\left[0.3^{t+d} \cdot \cos(1.4 \cdot t), 0.3^{t+d} \cdot \sin(1.4 \cdot t), 2^{t+d}\right], d, 0, 30, 0.5\right)$$

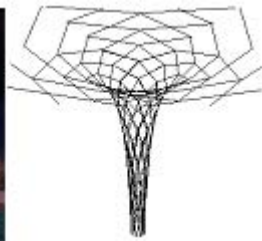
$$\text{VECTOR}\left(\left[0.3^{t+d} \cdot \cos(-1.4 \cdot t), 0.3^{t+d} \cdot \sin(-1.4 \cdot t), 2^{t+d}\right], d, 0, 30, 0.5\right)$$



In fine, l'immagine che è diventata icona dell'Expo di Milano, con piccole modifiche all'equazione di prima:

$$\text{VECTOR}\left(\left[0.9^{t+d} \cdot \cos(-1.4 \cdot t), 0.9^{t+d} \cdot \sin(1.4 \cdot t), -2^{t+d}\right], d, 0, 30, 0.5\right)$$

$$\text{VECTOR}\left(\left[0.5^{t+d} \cdot \cos(-1.4 \cdot t), 0.5^{t+d} \cdot \sin(1.4 \cdot t), -2^{t+d}\right], d, 0, 30, 0.5\right)$$

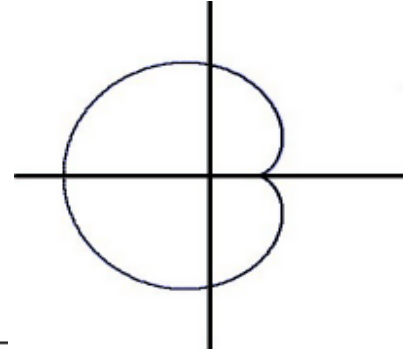
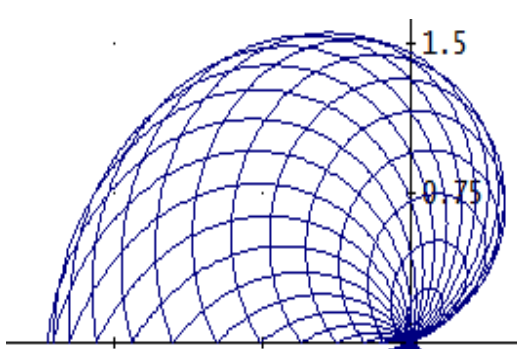


Cardioide.

L'equazione della cardioide: $\rho = 1 - \cos \theta$

fornisce spunto d'interpretazione una di quelle interessanti strutture che si devono a Norman Foster, la *City Hall* di Londra.

$$\text{VECTOR} \left(\left[r = LN(a) + \cos(a + d) \right], d, 0, 2 \cdot \pi, \frac{\pi}{12} \right)$$



La sagoma ricorda la cardioide. L'assetto ha una precisa funzionalità: l'obiettivo di creare ambienti ecosostenibili, che autoregolano la distribuzione del calore esterno schermando o ottimizzando l'esposizione all'irraggiamento solare.

L'edificio, semisfera deformata, ha una superficie, quasi verticalizzata, rivolta a sud. La superficie esposta a irraggiamento d'estate è minima, d'inverno massima.

Irraggiamento:
 $P = e \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$



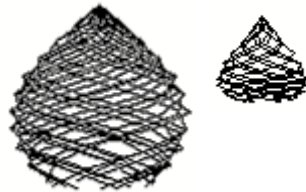
Ma ricorda anche la conchiglia 'nautilus', che si ottiene sempre modificando l'equazione della spirale :

$$\left[1.2 \cdot (\sin(u))^2 \cdot \sin(v), 1.2 \cdot (\sin(u) \cdot \cos(u)), 1.2 \cdot (\sin(u))^2 \cdot \cos(v) \right]$$



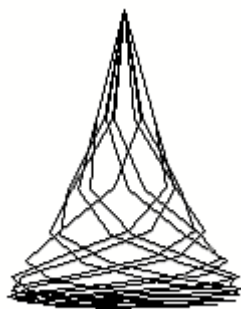
Particolarmente interessante la struttura delle innumerevoli cupole della cattedrale di S. Basilio a Mosca, per la forma a bulbo, che, forse, facilita il deflusso della neve, e che si ottiene intrecciando e manipolando equazioni di spirali e cardioidi:

$$\text{VECTOR}([2 - \cos(a + d) + \cos(2 \cdot a + d), \sin(a + d) - \sin(2 \cdot a + d), 1.3^a], d, 0, 10, 1)$$



Impressionante come alterando la base dell'esponenziale che fornisce la coordinata z, si ha persino la forma del campanile centrale:

$$\text{VECTOR}([2 - \cos(a + d) + \cos(2 \cdot a + d), \sin(a + d) - \sin(2 \cdot a + d), 2.5^a], d, 0, 10, 1)$$



Catenaria.

Le cupole forniscono spunto per valutazioni di tipo statico. Da questo punto di vista la catenaria è di grande interesse perché suggerisce forme che risolvono il problema delle spinte laterali tipiche di queste strutture.



Christopher Wren:
Saint Paul
Londra

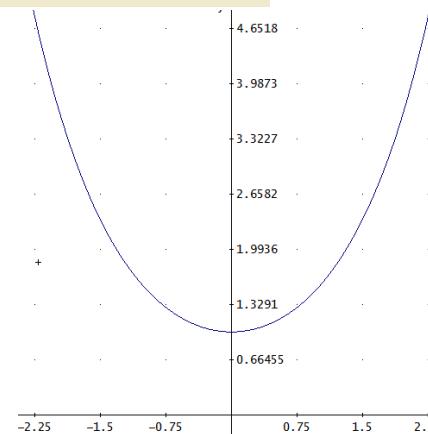


La catenaria è una curva, il cui andamento è quello di una fune omogenea, i cui estremi siano vincolati e che sia lasciata pendere, soggetta soltanto al proprio peso. Le tre cupole di S. Paul a Londra sono sagomate secondo catenarie rovesciate, che trasformano la tensione in compressione. In questo modo non c'è necessità di contrafforti o catene interne che ne contengano le spinte laterali. Se la fune non è omogenea, ma regge un peso, la sagoma si allunga.

E' quello che avviene per la cupola mediana (segnata in rosso) che regge la lanterna.

L'equazione della catenaria può essere espressa matematicamente tramite il coseno iperbolico:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a})$$



Data una catena sospesa agli estremi, in ogni suo punto agiscono la forza peso e la tensione.

Per la condizione di equilibrio:

$$\mathbf{0} = \vec{F}_0 + \vec{g} \int_0^s \lambda(s) ds + \vec{\tau}(s)$$

Dove \vec{F}_0 è la forza che regge gli estremi, $\lambda(s)$ la densità lineare, $\vec{\tau}(s)$ la tensione in s.

Se la densità lineare è costante, allora: $\lambda(s) = \lambda$

Derivando rispetto a s:

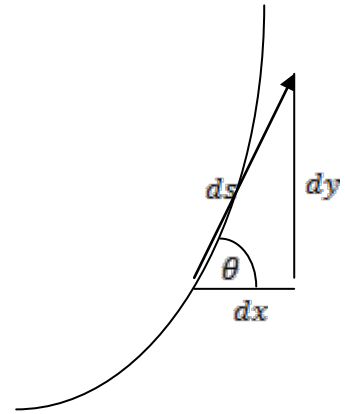
$$0 = \lambda \vec{g} + \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}$$

Che secondo le componenti x e y:

$$\frac{d(\tau \cos\theta)}{ds} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d(\tau \sin\theta)}{ds} = \lambda g \quad (2)$$

Con $\theta = \arctan \frac{y}{x}$



Posto $\tau \cos\theta = k$, cioè $\tau = \frac{k}{\cos\theta}$, sostituendo nella (2):

$$\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{ds} = \frac{\lambda g}{k} \quad (3)$$

Se ds è il differenziale dell' ascissa curvilinea, allora:

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dalla (3) si ha : $ds = \frac{k}{\lambda g} d(\operatorname{tg}\theta)$

Quindi : $d(\operatorname{tg}\theta) = \frac{\lambda g}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

$$\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{dx} = \frac{\lambda g}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dato che : $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$

allora: $\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$

Quindi:
$$y'' = \frac{\lambda g}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Che è un'equazione differenziale difficile (!!)

$(y'')^2 - h^2 (y')^2 - h^2 = 0$ posto: $h = \frac{\lambda g}{k}$

..... ma non impossibile.

Perché la soluzione è del tipo : $y = a e^{bx}$ con a e b costanti da determinare tramite condizioni al contorno. Quindi:

$y' = abe^{bx}$ e $y'' = ab^2 e^{bx}$

Quindi:

$a^2 b^4 e^{2bx} - a^2 h^2 b^2 e^{2bx} - h^2 = 0$

La cui omogenea associata:

$b^4 e^{2bx} - h^2 b^2 e^{2bx} = 0$

Dà come valori di b : $b = \pm h$

Quindi la soluzione è:

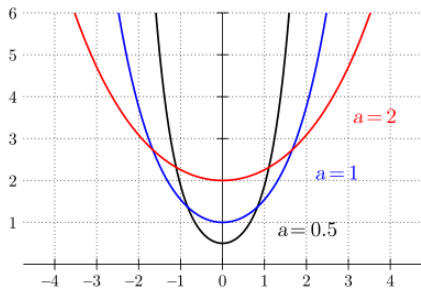
$y = a(e^{hx} + e^{-hx})$

Che sostituita nell'omogenea associata:

$a = \pm \frac{1}{2h}$

Da cui la funzione vista all'inizio:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}) .$$



Gaudí: Casa Millà Barcellona



Calatrava: Città della scienza e delle arti
Valencia

Eliche.

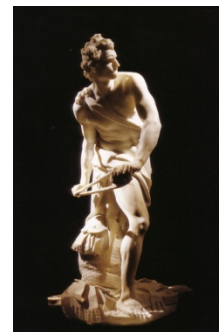
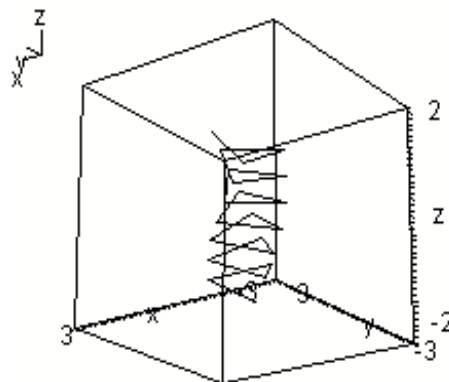
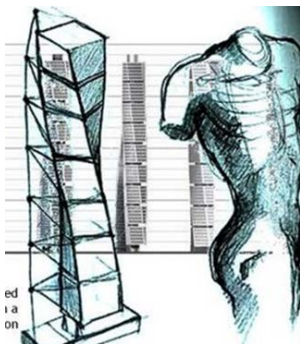
Il grattacielo 'Turning Torso' costruito da Santiago Calatrava a Malmö, sulla punta sud della Svezia, svetta isolato, molto visibile e molto esposto, in un'area ventosissima della zona portuale.

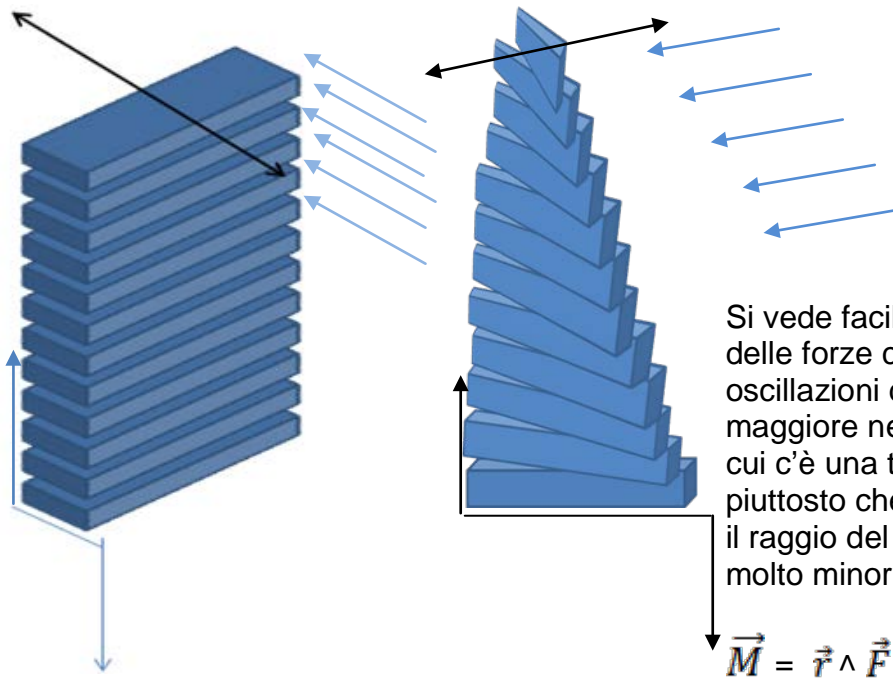
Colpisce per l'insolita forma, in cui ogni blocco ruota, fino a un totale di 90° gradi, dal basso in alto. Una spina dorsale sembra reggerlo, come in un busto umano, a cui l'architetto dichiara di essersi ispirato.

La torsione, tuttavia, ha ragioni statiche oltre che estetiche. In una zona molto ventosa c'è un forte il rischio che una struttura alta, peraltro non schermata da altri edifici, oscilli fino alla risonanza, con esiti catastrofici. Ancora una volta ci si chiede fino a che punto non sia la matematica, oltre che l'arte, ad ispirare le forme architettoniche. In ogni caso le equazioni parametriche dell'elica:



$$\left[\cos(t), \sin(t), \frac{t}{4} \right]$$





Si vede facilmente che il momento delle forze che si oppone a eventuali oscillazioni dovute ai venti è molto maggiore nella struttura di sinistra, in cui c'è una torsione di 90° gradi, piuttosto che in quella di destra, in cui il raggio del momento delle forze è molto minore.

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Anche il 'Turning Torso' può essere ottenuto matematicamente, si tratta, infatti, del cosiddetto pseudocubo le cui equazioni parametriche, sotto riportate e implementate su Derive, danno luogo allo schema qui a sinistra:



$$\begin{aligned}
 X(): & \frac{0.848528 * (\cos(u) * \cos(v) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100} * (\text{abs}(\cos(4 * v / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * v / 4))^{100})^{-1/100}}{\cos((1.6 * (\sin(u) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100}) - 1.6) * 2 * \pi * 0.3 / 3.2)} - \frac{\cos(u) * \sin(v) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100} * (\text{abs}(\cos(4 * v / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * v / 4))^{100})^{-1/100}}{\sin((1.6 * (\sin(u) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100}) - 1.6) * 2 * \pi * 0.3 / 3.2)} \\
 Y(): & 1.6 * (\sin(u) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100}) \\
 Z(): & \frac{0.848528 * (\cos(u) * \cos(v) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100} * (\text{abs}(\cos(4 * v / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * v / 4))^{100})^{-1/100}}{\sin((1.6 * (\sin(u) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100}) - 1.6) * 2 * \pi * 0.3 / 3.2)} + \frac{\cos(u) * \sin(v) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100} * (\text{abs}(\cos(4 * v / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * v / 4))^{100})^{-1/100}}{\cos((1.6 * (\sin(u) * (\text{abs}(\cos(4 * u / 4))^{100} + \text{abs}(\sin(4 * u / 4))^{100})^{-1/100}) - 1.6) * 2 * \pi * 0.3 / 3.2)}
 \end{aligned}$$

Auditorium.

Le forme delle sale concerto spesso richiamano quelle dell'ellissoide, come già visto all'inizio, ma lo studio può essere esteso alla complessa struttura che N. Foster ha realizzato a New Castle.

Dalla sagoma sono riconoscibili tre forme semiellissoidali che forse corrispondono ad altrettante sale concerto. La forma matematica è stata ottenuta combinando una funzione

trigonometrica con una 'versiera' di Agnesi leggermente modificata (c'è un $x^{0.8}$), che ne delinea il profilo, e una circonferenza che ne dà la sezione trasversale.

$$\frac{1}{1+x^{0.8}} \cdot \sin(x)^3 + \sqrt{(3-y)^2}$$

Forster: Auditorium
New Castle (Gateshead)

